سری ششم تمرین‌های ریاضی ۲

۱۸ اردیبهشت ۱۳۹۷

نمونه سوال‌های امتحانی

سوال ۱ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): نقاط بحرانی تابع $f(x,y)=xye^{-(\frac{x^2+y^2}{2})}$ را در $\mathbb{R}^2$ بیابید و با استفاده از آزمون مشتق دوم مشخص کنید که از چه نوعی (ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی یا زینی) هستند. آیا f روی $\mathbb{R}^2$ ماکسیمم یا مینیمم مطلق دارد؟

سوال ۲ (نیم‌سال اول ۹۵-۹۴): با استفاده از روش ضریب لاگرانژ، حداکثر و حداقل فاصله مبدا را تا نقاط رویه $x^4+y^4+z^4=1$ را پیدا کنید.

سوال ۳ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): تابع $f(x,y)=x^2y-x^2-y^2+y+5$ با ضابطه داده شده است. نقاط بحرانی f را مشخص کنید و تعیین کنید کدام‌یک نقطه ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی یا نقطه زینی است.

سوال ۴ (نیم‌سال دوم ۹۳-۹۲): رویه $x^2+y^2-2z^2=1$ و نقطه $P=(1,1,1)$ را در نظر بگیرید. مجموعه تمام نقاط Q از این رویه را بیابید طوری که پاره‌خط PQ در نقطه Q بر رویه مماس باشد. کوتاه‌ترین طول در بین چنین پاره‌خط‌های مماس PQ چقدر است؟ چرا؟

سوال ۶ (نیم‌سال دوم ۹۶-۹۵): فرض کنید متغیرهای x، y، z، u و v در روابط زیر صدق می‌کنند

$$\begin{cases} e^{u+v}+yz=\cos y-2\sin x \\ e^{x-y}+uv=sinz \end{cases}$$

می‌دانیم در نزدیکی نقطه $(x,y,z,u,v)=(0,0,0,1,-1)$ می‌توان x و v را بر حسب توابعی مشتق‌پذیر از y، z و u نوشت. مقدار تقریبی x و v را با تقریب درجه اول، به ازای $y=0.1$، $z=0.1$ و $u=1.1$ محاسبه کنید.

تمرین‌های برگزیده

تمرین ۱: معادله صفحه مماس بر رویه $z=xy$ را چنان بیابید که بر خط زیر عمود باشد:

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-1}{-1}$$

تمرین ۲: اکسترمم‌های تابع $f(x,y,z)=xy+2z$ را بر منحنی تقاطع رویه‌های $x+y+z=0$ و $x^2+y^2+z^2=24$ بیابید.

تمرین ۳: ماکسیمم و مینیمم تابع $f(x,y)=(x+y)e^{-(x^2+y^2)}$ را بر قرص $x^2+y^2\leq 1$ بیابید.

تمرین ۴: ماکزیمم و مینیمم تابع $f(x,y,z)=x$ را بر فصل مشترک صفحه $z=x+y$ و بیضی‌وار $x^2+2y^2+2z^2=8$ بیابید.

تمرین ۵: برای تابع $f(x,y)=(x^2-1)+(y^2-1)^2$،

الف) همه نقاط ماکسیمم موضعی، مینیمم موضعی و زینی را مشخص کنید.

ب) در نقطه $(2,3)$ بردار یکه‌ای را معرفی کنید که تابع f در جهت آن بیشترین افزایش را داشته باشد.

ج) معادله صفحه مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $(2,3)$ بدست آورید.

تمرین ۶: نقاط بحرانی تابع $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$ را بیابید و مشخص کنید از کدام نوع هستند.

تمرین ۷: حجم بزرگترین مکعب مستطیل با یال‌های موازی محورهای مختصات که قابل نشاندن در بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ است را بیابید.

تمرین ۸: مساحت کوچک‌ترین بیضی $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$ را که شامل مستطیل $-1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2$ است، بیابید.

تمرین ۹: سیمی به طول L سانتی‌متر را به **حداکثر** سه قسمت می‌بریم و هر قسمت را به صورت مربع در می‌آوریم. مینیمم و ماکزیمم مجموع مساحت مربع‌ها چقدر است؟

تمرین ۱۰: اگر $f(x,y) = (xe^y + \cos 2\pi y, x^2, x - e^y)$، تقریب خطی f را در نقطه $(x,y) = (1.02, 0.01)$ محاسبه نمایید.

تمرین ۱۱: تقریب درجه دوم تیلور برای تابع $f(x,y) = e^x \sin y$ حول نقطه $(x,y) = (0,0)$ را بدست آورید.

تمرین ۱۲: مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع n متغیره $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ تحت قید $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$ را بیابید.

تمرین ۱۳: فرض کنید نقاط $(x_1,y_1), (x_2,y_2), \cdots (x_n,y_n)$ در صفحه داده شده باشند. معادله خط $f(x) = ax + b$ را بیابید به طوری که مجموع مربعات حاصل از جایگذاری $f(x_i)$ به جای y_i کمترین مقدار شود.

تمرین ۱۴: اگر α، β و γ زوایای یک مثلث باشند، نشان دهید:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$$